Title	Genus2のHeegaard分解をもつS^3について (曲面の位置の理論と関連する話題)
Author(s)	本間, 龍雄
Citation	数理解析研究所講究録 (1977), 297: 54-68
Issue Date	1977-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/106246
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
297巻 1977年 54-68

Genus 2 の Heegaard 分解をもつ S^3 について

東工大 理学部 本間龍雄

Poincaré 予想がもしも肯定的に解決したとしても、群が trivial かどうかを判定する方法が決定されていないから、与えられた 3-manifold が 3-Sphere かどうか判定する方法が見つかるとは限らない。この paper では genus 2 の Heegaard 分解をもつ 3-manifold は 3-sphere かどうかを判定する単純な algorithm が存在することを証明する。

<u>Def</u> M, L が genus 2 の solid torus で、$N = M \cap L = \partial M = \partial L$ であるとき、$\{M, L, N\}$ を 3-manifold $M \cup L$ の <u>genus 2 の Heegaard 分解</u>という。

今後 M, L, N は上述の定義の genus 2 の二つの solid torus と torus をそれぞれ意味するものとする。

<u>Def.</u> $M(L)$ の proper な disc の boundary

を <u>meridian</u> (<u>longitude</u>) と呼ぶ。 $\mu = \{m_1, m_2, m_3\}$ ($\lambda = \{l_1, l_2, l_3\}$) が互いに交わらない meridian (longitude) で、どの二つも $H_1(N)$ で一次独立なとき、<u>meridian-系</u> (<u>longitude-系</u>) と呼ぶ。
また $\{\mu, \lambda\}$ を <u>m.l.-系</u> と呼ぶ。

<u>Def.</u> meridian と longitude が transversal に交わり、両者の二つの弧によって N の disc が bound されないとき、m.l.-系 は <u>normal</u> であるという。

meridian 又は longitude を N 上の isotopy で動かして、任意の m.l.系 は normal にできるから、今後 normal な m.l.系 のみを扱う。

$\mu = \{m_1, m_2, m_3\}$, $\lambda = \{l_1, l_2, l_3\}$ が normal な m.l.-系 であるとき、$M \cup L$ が homology-sphere なら

$$N - (m_1 \cup m_2 \cup m_3 \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3)$$

の各連結成分の boundary は、4つの弧、又は6つの弧、又は8つの弧からできていて、meridian と longitude の弧が交互に並んでいる。それぞれの場合各連結成分の閉包を<u>四辺形</u>、<u>六辺形</u>、<u>八辺形</u>といい、これ等を m.l.-系 $\{\mu, \lambda\}$ の<u>多辺形</u>と呼ぶ。homology sphere かどうかの判定は容易なので、ここで扱う 3-manifold は homology sphere に限ることにする。

Def. m.l.-系の多辺形で一つの meridian あるいは一つの longitude に属する二辺をもつものが存在するとき、reducible であるという。前者の場合を m-reducible, 後者の場合を l-reducible という。reducible でないとき irreducible という。

reducible なときに実際に reduction が存在することを示すために m.l.-系の性質を調べる。つぎのことは良く知られている。

Prop. 1 (m.l.-系の対称性) $\{\mu, \lambda\}$ が任意の m.l.-系であるとき、N の involution T $(T^2 = I)$ が存在し

$$T(m_i) = m_i \quad , \quad T(l_i) = l_i \qquad i = 1, 2, 3.$$

を満たす。

もちろん $N - (m_1 \cup m_2 \cup m_3)$ は二つの連結成分をもつがその一つの閉包 N^+ 内の longitude の様子により、m.l.-系の性質もある程度判明する。例えばつぎの命題が成立する。

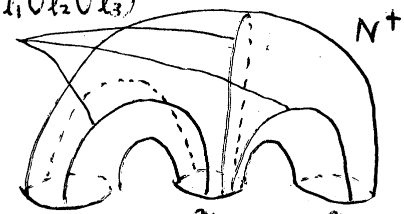


図 1

Prop. 2 多辺形で m_3 に属する二つの弧をもつ(従って m.l.-系は m-reducible)ものが存在するための必要充分条件は、$N^+ \cap (l_1 \cup l_2 \cup l_3)$ に含まれる弧で、m_1 と m_3, m_2 と m_3 ~~に属する~~ を結ぶ弧が存在し、m_1 と m_2 を結ぶ弧が存在しないことである。

Proof　m_1とm_2を結ぶlongitudeの弧が存在すればm_3の二つの弧を二辺とする多辺形は存在し得ない。またhomology sphereであるからm_1とm_3, m_2とm_3を結ぶlongitudeの弧が存在する。

Remark　Prop.2でm_3から出てm_3に入るlongitudeの弧がある場合とない場合(後に述べる0-型)とがある。図1はそのような弧が存在する場合である。

MUL は homology sphere であることと Prop.2 よりつぎの命題が直ちに導びかれる。

Prop.3　Prop.2の条件のもとで、$(l_1 \cup l_2 \cup l_3)-(m_1 \cup m_2)$の弧$a$で$m_1$と$m_2$を結ぶものが存在し、$a$は$m_3$と交わる。(図2)

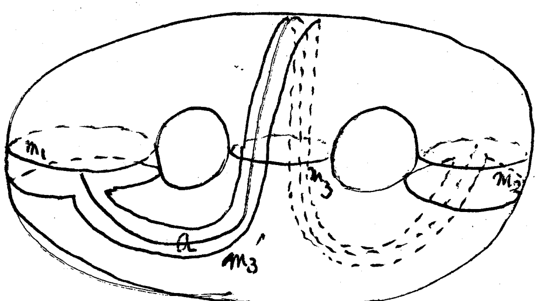


図2

Reduction の方法

$\{\mu, \lambda\}$がreducibleとする。

たとえばProp.2の条件を満足したとする。図2のようにaを中心線とするbandでm_1とm_2をつなぐと新しいmeridian系$\mu' = \{m_1, m_2, m_3'\}$を得る。(後に述べるsimple transformation)　つぎの命題によりこの変換$\{\mu, \lambda\} \longrightarrow \{\mu', \lambda\}$はreductionとなっている。

Prop.4　meridian系とlongitude系の交点数は

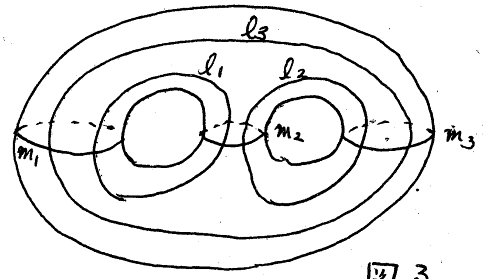
$\{\mu', \lambda\}$ が $\{\mu, \lambda\}$ より少なくなっている。

<u>Proof</u>　m_1 と m_2, λ はそのままだから, m_3' と λ の交点数が, m_3 より少なくなっていることを示せば良い。図1を見れば判るように m_3 と λ の交点数は

m_1の交点数 ＋ m_2の交点数 ＋ m_3を結ぶ弧の数

であるが, 図2で判るように m_3' と λ の交点数は m_3 と α の交点数だけ少なくなる（normal になおすので実際はもっと少なくなる。）

<u>Def.</u>　任意の meridian と任意の longitude が丁度一点で交わるとき, その m.l.-系は標準形と呼ばれる。



標準形　図3

m.l.-系が標準形ならば, もちろん 3-manifold M∪L は 3-sphere となるが, 次の定理がこの paper の主定理である。

<u>Theorem</u>　S^3 の genus 2 の Heegaard 分解の irreducible な m.l.-系は標準形である。

<u>S^3判定の algorithm</u>　genus 2 の Heegaard 分解をもつ 3-manifold M∪L が与えられれば homology sphere かどうかは直ちに判定できる。homology sphere ならばその m.l.系が reducible か irreducible かを判定し

(判定の方法は簡単である) reducible ならば irreducible になるまですでに述べた手段で reduction を繰り返し，最後に得た irreducible な m.l.-系 が標準形ならば S^3，標準形でなければ S^3でない。

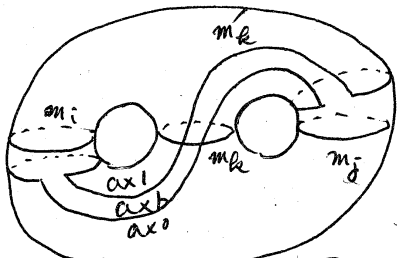


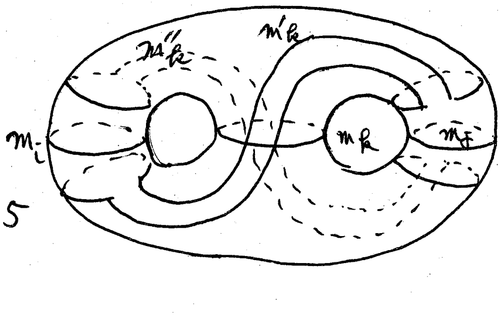
図4

<u>Def.</u> meridian系 (longitude系) の <u>simple transformation $\mu \xrightarrow{s} \mu'$</u> ($\lambda \xrightarrow{s} \lambda'$) とは，$\mu=\{m_i, m_j, m_k\}$ の二つの meridian m_i, m_j はそのままにして，残りの一つの meridian m_k の代りに m_i と m_j を <u>band $a\times b$</u> ($a=b=[0,1]$) でつないで新しい meridian 系 $\mu'=\{m_i, m_j, m_k'\}$ を作ることである。(図4)

<u>Remark</u> band $a\times b$ が m_k と交わらなければ，m_k' は N上の isotopy で m_k に移れるから μとμ'は同じ meridian 系と考えられる。故に band $a\times b$ は常に m_k と交わるものとする。

つぎの Prop. は明らかである。

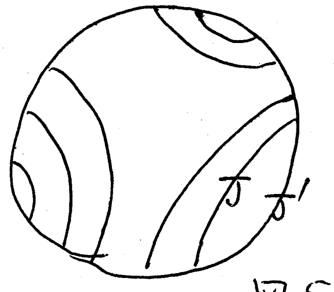
<u>Prop. 5</u> (Simple transformation の可換性) simple transformation $\mu \to \mu'$ と $\mu \to \mu''$ において，$\mu=\{m_i, m_j, m_k\}$ $\mu'=\{m_i, m_j, m_k'\}$，$\mu''=\{m_i, m_j, m_k''\}$ 図5



で，両者の band が交わらず m_i と m_j をうみ側からつないで，μ'_k と μ''_k が作られるならば，μ'_k と μ''_k は N 上の isotopy で互いに移れるから，μ' と μ'' は同じ meridian 系と考えて良い。

Def. $\mu=\mu_0 \xrightarrow{s} \mu_1 \xrightarrow{s} \mu_2 \xrightarrow{s} \cdots\cdots \xrightarrow{s} \mu_m = \mu'$ が simple transformation の列で，(1) μ_i の新しい meridian と古い meridian の一つを band をつないで μ_{i+1} の新しい meridian が作られ，(2) $\mu_i \xrightarrow{s} \mu_{i+1}$ の band は $\mu_{i-1} \xrightarrow{s} \mu_i$ の band の中を通っているとき，この列を elementary transformation と呼び，$\mu \xrightarrow{e} \mu'$ と書く。

m, $\{m_1, m_2, m_3\}$ は meridian と meridian 系で normal に交わるものとする。D, $\{D_1, D_2, D_3\}$ をそれぞれに対応する meridian disc とする。$D \cap (D_1 \cup D_2 \cup D_3)$ は $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ の boundary の二点を結ぶ曲線の集合からできているとして良いが，その中で outermost なものを一つ選び J とし，それに対応する boundary arc (meridian の弧) を J' とする。m を二点 $\partial J = \partial J'$ で切断してできる弧を $\overline{m'}$, $\overline{m''}$ とし，$\{m, \overline{m'} \cup J', \overline{m''} \cup J'\}$



D_i 図5
$\partial D_i = m_i$

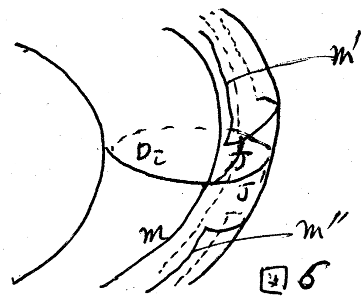


図6

を normal になおして meridian 系 $\{m, m', m''\}$ を得る。これは m' と m'' を band をつないで m を作る操作の逆をしたことになる。

<u>Prop. 6</u> (meridian 系作成の一意性) 上に述べた $\{m, m', m''\}$ は J の選び方に無関係に一意的に定まる。(mod. isotopy)

<u>Proof</u> J の選び方によって、二つの meridian 系 $\mu_1 = \{m, m_1', m_1''\}$, $\mu_2 = \{m, m_2', m_2''\}$ が作られたとする。m_1' は μ_2 と交わらず, m_2'' は μ_1 と交わらないとして差支えない。meridian 系 μ_i $(i=1, 2)$ と交わらない meridian は μ_i の三つの meridian のどれか一つと isotopic である。故に μ_1 と μ_2 は isotopic である。

二つの meridian 系 $\mu = \{m_1, m_2, m_3\}$ と $\bar{\mu} = \{\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3\}$ がえられたとき、上に述べた meridian 系の作り方と同じ方法で新しい meridian 系 $\mu' = \{m_1', m_2', m_3'\}$ を作り、$\mu' \xrightarrow{s} \mu$ は simple transformation となり、μ' と $\bar{\mu}$ の交点数を μ と $\bar{\mu}$ の交点数より下げることができる。Prop. 6 よりつぎの命題を得る。

<u>Prop. 7</u> (simple transformation 作成の一意性) 上に述べた $\mu' \xrightarrow{s} \mu$ の作り方において, μ' は μ と $\bar{\mu}$ によってのみ一意的に定まる。(mod. isotopy)

Prop. 7 を繰り返して用いることによりつぎの Lemma を得る。

<u>Lemma 1</u> 二つの meridian 系 $\mu, \bar{\mu}$ が与えられれば, elementary transformation $\bar{\mu} \xrightarrow{e} \mu$ が存在し, 一意的に定まる。

つぎの Lemma は良く知られている。

<u>Lemma 2</u> (Waldhausen の定理) S^3 の genus 2 の Heegaard 分解は標準形の m.l. 系をもつ。

Lemma 1 と Lemma 2 よりつぎの Lemma を得る。

<u>Lemma 3</u> S^3 の任意の genus 2 の Heegaard 分解の m.l. 系を $\{\mu, \lambda\}$ とする。標準形 $\{\bar{\mu}, \bar{\lambda}\}$ からの elementary transformation $\{\bar{\mu}, \bar{\lambda}\} \xrightarrow{e} \{\mu, \lambda\}$ が存在し, 一意的に定まる。

elementary transformation $\{\bar{\mu}, \bar{\lambda}\} \xrightarrow{e} \{\mu, \lambda\}$ とは meridian 系の elementary transformation $\bar{\mu} \xrightarrow{e} \mu$ と longitude 系の elementary transformation $\bar{\lambda} \xrightarrow{e} \lambda$ を組み合わせたもので,

$$\bar{\mu} = \mu_0 \xrightarrow{s} \mu_1 \xrightarrow{s} \cdots\cdots \xrightarrow{s} \mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m = \mu$$

$$\bar{\lambda}=\lambda_0 \xrightarrow{s} \lambda_1 \xrightarrow{s} \cdots\cdots \xrightarrow{s} \lambda_{\ell-1} \xrightarrow{s} \lambda_\ell = \lambda$$

と表わされているものとする。

定理の証明では $\{\mu, \lambda_i\}$ の reduciblity を i に関する induction で確かめる。もしも $\lambda_{i-1} \xrightarrow{s} \lambda_i$ の band が μ の meridian を横切れば，$j \geqq i$ なるすべての j に対し，$\lambda_{j-1} \xrightarrow{s} \lambda_j$ の band が μ を横切って，$\{\mu, \lambda_j\}$ はすべて l-reducible で，もちろん $\{\mu, \lambda\}$ も l-reducible となるから，(i) <u>$\lambda_{i-1} \xrightarrow{s} \lambda_i$ の band は μ を横切らない</u>と仮定して良い。

もしも $\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m = \mu$ の band が $\bar{\lambda}=\lambda_0$ を横切らなければ，μ は標準形となり (i) より λ も標準形となって定理は自明となるので，(ii) <u>$\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m = \mu$ の band は $\bar{\lambda}=\lambda_0$ を横切る</u>ものとする。

<u>Def.</u> m.l.-系が八辺形をもつとき，<u>0-型</u>という。

八辺形ならば四辺は meridian の弧であり，他の四辺は longitude の弧であるから，二辺は一つの meridian に属し，二辺は一つの longitude に属するからつぎの命題が成立つ。

<u>Prop. 8</u> 0-型の m.l.-系は m-reducible であり，l-reducible である。

<u>Def.</u> $\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m = \mu$ の band $a \times b$ の subband

$[t_1, t_2] \times b$ $(0 < t_1 < t_2 < 1)$ がλ_iの二つの longitude を結んでいてそれ以外ではλ_iの longitude と交わらないとき，$[t_1, t_2] \times b$ を <u>bridge</u> と呼ぶ。

<u>Def.</u> $\{\mu, \lambda_i\}$ を bridge を用いてつぎのように分類する。

<u>1-型</u>：1対の longitude に bridge が存在し，他の二対に bridge が存在しない。

<u>2-型</u>：2対の longitude に bridge が存在し，他の一対に bridge が存在しない。

<u>3-型</u>：三対の longitude とも bridge が存在する。

<u>Prop. 8</u> $\{\mu, \lambda_i\}$ が1-型，2-型または3-型ならば，m-reducible である。

<u>Proof</u> bridge $[t_1, t_2] \times b$ は四辺形で，二辺 $[t_1, t_2] \times \dot{b}$ はμの一つの meridian に属するから，いずれの場合も m-reducible である。

定理の証明には，(i), (ii) の仮定のもとですべての$\{\mu, \lambda_i\}$が$\{\mu, \lambda_i\}$が 0, 1, 2, 3－型 のいずれかであることを確める。つぎの命題が定理の証明に非常に役に立つ。

<u>Lemma 4</u> simle transformation $\lambda_{i-1} \xrightarrow{S} \lambda_i$ で結ばれるλ_{i-1}の二つの longitude をつなぐ bride が存在すれば，$\lambda_i \xrightarrow{S} \lambda_{i+1}$ で結ばれる二つの longitude をつなぐ bridge が存在する。

<u>Proof</u> $\lambda_{i-1}=\{l_1, l_2, l_3\}$, $\lambda_i=\{l_1, l_2, l_3'\}$で，$l_1$と$l_2$を結ぶbridgeが存在したとする。$l_3'$は$l_1$と$l_2$をbandで結んでできるlongitudeであるから，λ_iにおいでl_1とl_3'を結ぶbridgeと，l_2とl_3'を結ぶbridgeが共に存在する。simple transformation $\lambda_i \xrightarrow{s} \lambda_{i+1}$は$l_1$と$l_3'$をbandで結ぶか，$l_2$と$l_3'$をbandで結ぶかのどちらかであるから，Lemma 4が成立する。

Lemma 4の前提の条件を$\lambda_{i-1} \xrightarrow{s} \lambda_i$が満足すればそれ以後の$\lambda_j \xrightarrow{s} \lambda_{j+1}$ $(i \leqq j)$はすべてその条件を満足することをLemma 4は明らかにしている。故に結論として$\{\mu, \lambda\}$にもbridgeが存在し，従ってm-reducibleである。

<u>定理の証明</u> elementary transformation

$$\{\mu, \bar{\lambda}\} \xrightarrow{s} \{\mu, \lambda_1\} \xrightarrow{s} \cdots\cdots \xrightarrow{s} \{\mu, \lambda_{e-1}\} \xrightarrow{s} \{\mu, \lambda\}$$

の各stepのm.l.系$\{\mu, \lambda_i\}$が0, 1, 2, 3－型のどれかであることを確める。仮定(iii)より$\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m=\mu$のbandは$\bar{\lambda}=\lambda_0$を横切るが，bridgeが存在しなければ，isotopyでbandと$\bar{\lambda}$の交わりはなくせるから，bridgeは必らず存在するとして良い。故にinductionの出発点の$\{\mu, \bar{\lambda}\}$は1, 2, 3型のいずれかである。

a) <u>$\{\mu, \bar{\lambda}\}$が3－型の場合</u>，この場合は$\bar{\lambda}=\lambda_0 \xrightarrow{s} \lambda_1$

Lemma 4 の前提の条件が満足されるので，inductive にすべての段階でこの条件が満され，結局 $\{\mu, \lambda\}$ は m-reducible となる。

b) $\{\mu, \bar{\lambda}\}$ が 1-型の場合，この場合は，$\bar{\lambda} = \lambda_0 = \{l_1, l_2, l_3\}$ で l_1 と l_2 を結ぶ bridge が存在したとする。もしも simple trasformation $\lambda_0 \xrightarrow{s} \lambda_1$ において，l_1 と l_2 が band で結ばれるなら Lemma 4 より，a) の場合と同じ理由で $\{\mu, \lambda\}$ は m-reducible となる。故に l_1 と l_3 または l_2 と l_3 を band で結ぶ場合のみを考えれば良い。いま l_1 と l_3 が band で結ばれ新しい λ_1 の longitude l_3' ができたとする。仮定(i) よりその band は μ を横切らないことと，l_1 と l_2 にかかる bridge が存在することより，l_2 と l_3' を結ぶ bridge の数は l_2 と l_3 を結ぶ bridge の数より少なくなる。引き続き longitude-系の simple transformation を進めると，$\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m$ の band と longitude 系の交わりが減っていく。$\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m$ の band と longitude が交わらなくなった後は，$\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m$ の band と，$\lambda_{i-1} \xrightarrow{s} \lambda_i$ の band の交わりの中に八〇形が現われるから，$\{\mu, \lambda_i\}$ は 0-型となる。$\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m$ の band と longitude が交わって

いる向はもちろん $\{\mu, \lambda_i\}$ は m-reducible であるから，いずれにしても reducible である。

c) <u>$\{\mu, \lambda\}$ が 2-型の場合</u>　この場合は $\lambda = \lambda_0 = \{l_1, l_2, l_3\}$ において l_1 と l_2 を結ぶ bridge と l_1 と l_3 を結ぶ bridge が存在したとする。Lemma 4 より simple transformation $\lambda_0 \xrightarrow{s} \lambda_1$ は l_2 と l_3 を band で結ぶ場合を考えれば良い。このとき二つの場合が考えられる。まず $\{\mu, \lambda_1\}$ が 3-型になる場合であるが，この場合は a) に帰着する。つぎは $\{\mu, \lambda_1\}$ が 2-型または 1-型となる場合で，このときは $\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m = \mu$ の band と λ_1 の交わりは減っている。さらに引続く simple transformation で交わりは単調に減っていくから，b) の場合に帰する。　<u>証明終り</u>

[1] によるとソ連の A. Volodin, V. E. Kuznetsov, A. T. Fomenko は同じような Algorithm を genus が一般の場合の Heegaard 分解に対して考えている。10^6 個の例について試したところ正しかったそうであるが，まだ証明はできていないらしい。

参照文献

[1]　A. Volodin, V. E. Kuznetsov and A. T. Fomenko,

The Problem of Discriminating Algorithmically the Standard Three-dimensional Sphere, Russian Math. Surveys, 29:5 (1974), P.71—74.

[2] Birman J. S. and Hilden H. M., The homeomorphism for S^3. Bulletin of the A.M.S. vol. 79 No.5 (1973), P.1006〜1010。

[3] 高橋元男，種数2のHeegaard分解についてのBirman-Hildenの定理の別証，数理解析研究所講究録，243，(1975).

[4] F. Waldhausen, Heegaard-Zerlegung der 3-Sphäre, Topology, 7 (1968) P.195〜203

[5] 本間龍雄，S^3判定のAlgorithmについて，(多様体の低余次元位置問題について)，数理解析研講究録，243，(1975)。